

四庫全書

子部

欽定四庫全書

子部

歷算全書卷五十三至五

詳校官欽天監博士臣張大樞

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官編修臣王燕緒

校對官管靈臺郎臣陳際新

謄錄監生臣印鴻翦

繪圖監生臣周履信

欽定四庫全書

歷算全書卷五十三

宣城梅文鼎撰

三角法舉要卷四

或問

三角大意畧具首卷中而入算取用仍有疑端
喜同學之好問事事必求其所以然故不憚為

之詳復以
暢厥旨

一 三角形用正弦為比例之理

一 和較相求之理

一用切線分外角之理

一三較連乘之理

附三較求角

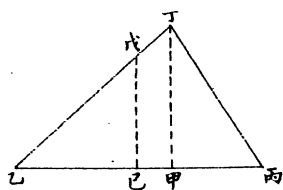
之正弦

解曰試以丁丙為半徑作丁甲線為丙角正弦又截戊乙如丁丙半徑作戊己線為乙角正弦丁甲正弦大於戊己故丁乙邊亦大於丁丙

問丁甲何以獨為丙角正弦也曰此以丁丙為半徑故也若以丁乙為半徑則丁甲即為乙角之正弦

如圖用丁乙為半徑作丁甲線為乙角正弦又引丙丁至戊令戊丙如丁乙半徑作戊己線為丙角正弦

問各角正弦與各邊皆不平行何以能相為比例曰凡
 三角形一邊必對一角其角大者正弦大而所對之
 邊亦大角小者正弦小而所對之邊亦小故邊與邊
 之比例如正弦與正弦也



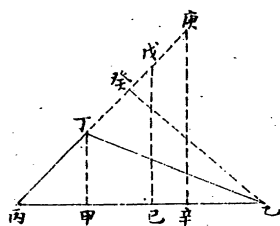
兩正弦為兩邊比例圖

乙丙丁三角形丁乙邊大對丙角

丁丙邊小對乙角術為以丁乙邊

比丁丙邊若丙角之正弦與乙角

正弦之比例



試以乙丁為半徑作丁甲線為乙

小角之正弦又引丙丁邊至戊使

戊丙如乙丁作戊己線為丙角之

正弦又展戊丙線至庚使庚丙如乙

丙作庚辛線為丁鈍角之正弦

如此則三邊皆若弦三正弦皆若股

其比例為以乙丙大邊

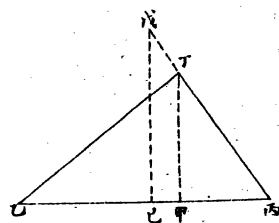
同庚

比乙丁次邊

同戊

若丁

鈍角之正弦庚辛與丙角之正弦戊己



即見乙角之正弦丁甲小於戊已
故丁丙邊亦小於丁乙

解曰正弦者半徑所生也故必兩
半徑齊同始可以較其大小前圖

截戊乙如丁丙此圖引丁丙如丁乙所以同之也

三正弦遞相為三邊比例圖

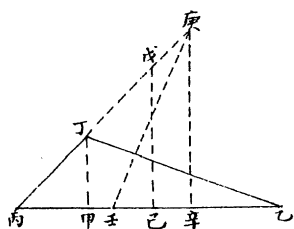
乙丁丙鈍角形丁鈍角對乙丙大邊丙次大角對乙
丁次大邊乙小角對丁丙小邊其各邊比例皆各角

而乙癸既丁角正弦矣等乙癸之庚辛又安得不為

丁角正弦乎

凡取正弦必齊其半徑此以丁甲為乙角正弦是用乙丁為半徑也而取丙角

正弦戊己必引戊丙如乙丁其丁角正弦庚辛又即外角之正弦乙癸是三半徑皆乙丁也



試取壬丙如丁丙作庚壬線即同

乙丁半徑則壬角同丁角壬外角

即丁外角而庚辛正弦之半徑仍

為乙丁

庚壬同乙丁故

此以庚壬當乙丁易乙丁丙形為

又以乙丁次大邊同戊丙比丁丙小邊若丙角之正弦

戊己與乙角之正弦丁甲

又以丁丙小邊比乙丙大邊同庚丙若乙小角之正弦

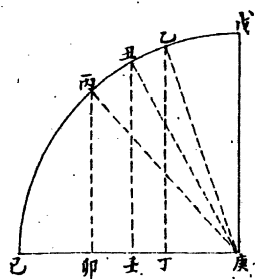
丁甲與丁鈍角之正弦庚辛

問庚辛何以為丁角正弦曰凡鈍角以外角之正弦為

正弦試作乙癸線為丁角正弦乙丁癸角外角也故其正弦即為丁鈍角

正必與庚辛等何也庚丙辛句股形與乙丙癸形等

庚丙弦既同乙丙又同用丙角辛與癸又同為方角故其形必等則庚辛必等乙癸



為半徑

取戊庚如乙丙

而以先所得各角

之餘弦取度於丁作乙丁為丙角

之正弦於壬作丑壬為甲角之正

弦於卯作丙卯為乙角之正弦即

如元度而各角之差數觀矣

戊庚半徑既同乙丙則丁庚即丁丙而為丙角

餘弦又壬庚即甲壬為甲角餘弦卯庚即卯乙為乙角餘弦

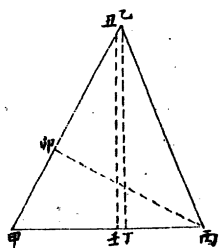
解曰角無大小以弧而知其大小今乙丁正弦其弧

乙己是丙角最大也丑壬正弦其弧丑己是甲角次

庚壬丙則庚辛正弦亦歸本位與前圖互明

試以各角正弦同居一象限較其弧度

如圖甲乙丙形丙角最大其正弦乙丁亦最大所對
甲乙邊亦最大甲角次大其正弦丑壬亦次大所對



乙丙邊亦次大乙角最小其正弦

丙卯亦小所對丙甲邊亦最小乙

二角正弦並乙丙為半徑甲角取
正弦截丑甲如乙丙亦以乙丙為

半徑乃別作一象弧如戊仍用乙丙

大而所對甲丙邊亦次大甲角最小其正弦丑壬亦

小而所對乙丙邊亦最小

截甲丑如乙丙從丑作丑壬即甲角正弦

乃從乙作乙庚弧

以丙為心乙丙為半徑

為

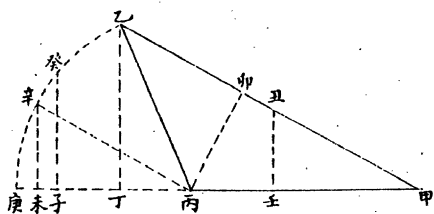
丙外角之度又作辛丙半徑與甲

乙平行分乙庚弧度為兩則辛庚

即甲角之弧度其餘辛乙亦即乙

角之弧度從辛作辛未正弦與丑

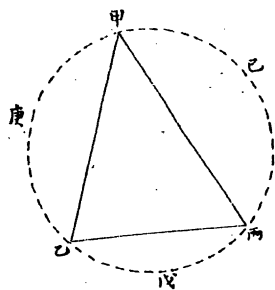
壬等又自庚截癸庚度如辛乙則



大也丙卯正弦其弧丙巳是乙角最小也而對邊之大小亦如之故皆以正弦為比例也

或疑鈍角之度益大其正弦反漸小而其所對之邊則漸大何以能相為比例乎曰此易知也凡鈍角正弦即外角之正弦而外角度原兼有餘兩角之度故鈍角之正弦必大於餘兩角而得為大邊之比例也

如乙丙甲鈍角形丙鈍角最大其正弦乙丁亦最大而所對乙甲邊亦最大乙角次大其正弦丙卯亦次



角甲乙邊為乙庚甲弧之通弦而
對丙角則是各角之對邊即各角
對弧之通弦也夫通弦者正弦之
倍數則三邊比例即三正弦之比
例矣

又試以各邊平分之則皆成各角之正弦

於前圖內更以各邊所當之弧皆平分

丙戊乙弧
平分于戊

點丙已甲弧平分于已點
乙庚甲弧平分于庚點

自員心

丁

各作半徑至其

癸庚亦乙角之弧作癸子正弦與丙卯等此顯丙外角之度兼有乙甲兩角之度其正弦必大於兩角正弦也雖丙鈍角加大而外角加小則乙甲兩角必又小於外角又何疑於鈍角正弦必為大邊比例乎

試更以各角切員觀之則各角之對邊皆為其對弧之通弦

如圖三角形以各角切員則乙丙邊為丙戊乙弧之通弦而對甲角甲丙邊為丙己甲弧之通弦而對乙

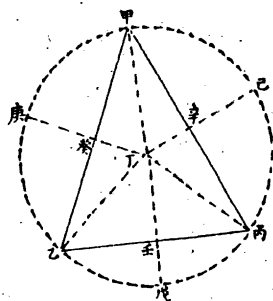
準此論之則甲丁己角原為甲丁丙角之半必與乙角同大故甲己半弧即乙角之本度甲辛半弧即乙角之正弦己丁丙角亦然又乙丁庚角原為乙丁甲角之半必與丙角同大故乙庚半弧即丙角之本度乙癸半弧即丙角之正弦庚丁甲角亦然夫分其邊之半即皆成

正弦則邊與邊之比例亦必如正弦與正弦矣

全與

全若半與半也

問三角之本度皆用半弧何也曰量角度必以角為員心真度乃見今三角皆切員邊則所作通弦之弧皆倍度也故半之乃為角之本度



點即分各邊為兩平分

以丁壬戊

半徑分乙丙邊于壬以丁辛

己半徑分甲丙邊于辛以丁

癸庚半徑分甲乙邊于癸

則所分之邊皆為兩平分

則所分之邊皆為兩平分則

弧之平分者即原設各角之

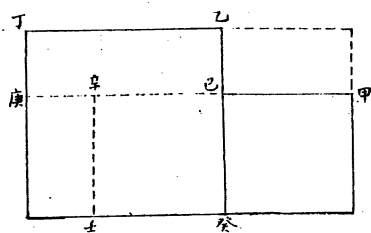
度而邊之平分者即皆各角

之正弦 丙丁戊角以丙戊為弧 丙壬為正弦而丙

丁戊角原為丙丁乙角之半 必與甲角同大故丙戊半弧

即甲角之本度丙壬半邊即 甲角之正弦乙丁戊角亦然

問三邊求角何以用和較相乘也曰欲明和較之用當先知和較之根凡大小兩方以其邊相併謂之和相減謂之較和較相乘者兩方相減之餘積也



如圖甲癸小方丁癸大方於大方內依小方邊作巳庚橫線又取巳辛如小方邊作辛壬線成巳壬小方與甲癸等大方內減巳壬小方則所餘者為乙庚及庚壬兩長方

如圖以甲角爲心甲丁爲半徑作員則其弧丑丁子

乃甲角之本度也而平分之丙戊及戊乙兩弧並與

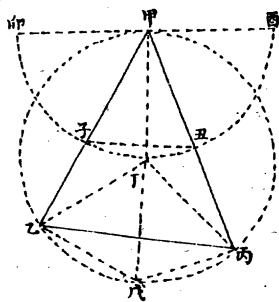
丑丁子弧等

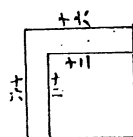
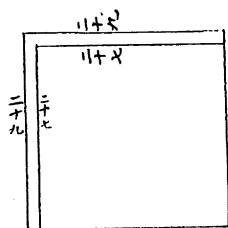
試作戊丙及乙戊兩弦必相等又故乙

並與丑子弦等凡弦等者弧亦等

戊丙弧必爲甲角之倍度

類餘角推





如圖有方二十九之冪八百
四十一與方二十七之冪七
百二十九相減成較二乘和
五十六之積

又有方十六之冪二百五十
六與方十二之冪一百四十
四相減成較四乘和二十八
之積

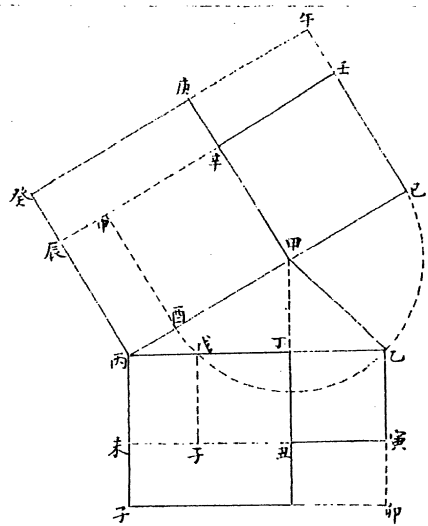
兩積同為一百一十二故以
先有之較二和五十六相乘

為實以今有之和二十八為法
除之即得較四為今所求數

是故三角形以兩弦之和乘較為實以兩分底之和為
法除之得較者為兩和較相乘同積也兩和較相乘同

形夫乙巳及丁庚及庚辛並兩邊之較也甲巳庚則和也若移庚壬長方為乙甲長方即成丁甲大長方而為較乘和之積故凡兩方相減之餘積為實以和除之得較以較除之亦得和矣

依此論之若有兩方形相減又別有兩方相減而其餘積等則為公積故以此兩方之和較相乘為實而以彼兩方之和為法除之得彼兩方之較或以彼兩方之較為法除之亦必得和



同 未卯長方為兩句之較乘

和也又丙巳為兩弦之和壬辰

同 酉丙為兩弦之較辰癸及辛庚壬

同 午並 癸壬長方為兩弦之較

乘和也此兩長方必等積

問兩弦上方大於兩句上方何以知其等積曰依句股

法弦上方冪必兼有句股上方冪是故甲丙弦冪內即癸

甲大 必兼有甲丁股丙丁句兩冪乙甲弦冪內即辛已

即辛已 小方

積者各兩方相減同積也

何以明之曰凡三角形以中長線分為兩句股則兩形同以中長線為股而各以分底線為句是股同而句不同也句不同者弦不同也弦大者句亦大弦小者句亦小故兩弦上方相減必與兩句上方相減之餘積等而兩和較相乘亦等

如圖甲乙丙三角形以甲丁中長線分為兩句股形則丙乙為兩句之和

未寅及子卯並同

丙戌為兩句之較

未子及寅卯並

問和較之列四率與諸例不同何也曰此互視法也同
文算指謂之變測古九章謂之同乘異除乃三率之別
調也何則凡異乘同除皆以原有兩率之比例為今兩
率之比例其首率為法必在原有兩率之中互視之術
則反以原有之兩率為二為三以自相乘為實其首率
為法者反係今有之率與異乘同除之序相反故曰別
調也

然則又何以仍列四率曰以相乘同實也三率之術二

亦兼有甲丁股乙丁句兩冪則是甲丁股冪者兩弦冪

所同也其不同者句冪耳股冪既同則弦冪相減時股冪俱對減而盡使非句冪不

同已無餘積然則兩弦冪相減之餘積于癸甲大方內減已

所餘者癸辛申丙豈不即為兩句冪相減之餘積乎于

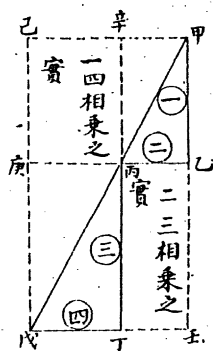
子方內減丁寅相同之戊丑小方所由是言之兩和較

相乘之等積信矣于弦冪相減之癸辛申丙磬折形內移申丙補庚壬即成和較相乘之癸

壬長方又于句冪相減之丑子未戊磬折形內移戊未

補丑卯即成和較相乘之未卯長方兩磬折形既等積

則兩長方亦等積



小句股亦相等

甲壬戌與甲巳戌等則甲

乙丙與甲辛丙等丙丁戌與丙庚戌等並長方均剖故也

即所成長方之積亦必相等

于甲壬戌句股形內減去相等之甲乙丙及丙丁戌兩小

句股存乙丙丁壬長方又于甲巳戌句股形內減去相等之甲辛丙及丙庚戌兩小句股存辛巳庚丙長方所減之數等則所存之數亦等故兩長方雖長濶不同而知其必為等積今以甲乙為首率

乙丙為次率丙丁為三率丁戌為四率則乙丁長方乙

丙丁為二三相乘之積此形以乙丙二率為濶丙丁三率為長是二率三率相乘也

三相乘與一四相乘同實故可以三率求一率

二三相乘以一

除之得四以四除之即仍得一若一四相乘以二除之亦可得三以三除之亦仍得二 互視之術

以原有之兩率自相乘與今有之兩率自相乘同實故

亦以三率求一率

原兩率自相乘以今有之率除之得今有之餘一率若今兩率自相乘以

原有之率除之亦即得原有之餘一率

但三率之術以比例成其同實互

視之術則以同實而成其比例既成比例即有四率故可以列而求之也

如圖長方形對角斜剖成兩句股則相等而其中所成

辛庚長方

即辛已庚丙形

為一四相乘之積

此形以辛丙為長丙庚為濶而辛丙

原同甲乙乃一率也丙庚原同丁戊乃四率也是一率四率相乘也

既兩長方相等則

二三相乘與一四相乘等實矣此列率之理也

一 甲乙

二 丙乙

三 丙丁

四 戊丁

在異乘同除本術則甲乙及丙乙為原有之數丙丁為

今有之數戊丁為今求之數其術為以原有之甲乙股比原有之丙乙句若今有之丙丁股與戊丁句也故于原有中取丙乙句與今有之丙丁股以異名相乘為實又于原有中取同名之甲乙股為法除之即得今所求之丁戊句是先知四率之比例而以乘除之故成兩長方二率乘三率成乙丁長方以首率除之必變為辛庚長方故曰以比例成其同實也

互視之術則乙丙與丙丁為原有之數甲乙為今有之

數丁戊為今求之數術為以乙丙較乘丙丁和之積若

丙庚較

即丁戊

乘丙辛和

即甲乙

之積故以原有之乙丙較

丙丁和自相乘為實以今有之甲乙和

即辛丙

為法除之

即得今所求之丁戊較

即丙庚

是先知兩長方同積而以

四率取之故曰以同實成其比例也

然則又何以謂之互視曰三率之用以原有兩件自相

比之例為今有兩件自相比之例是視此之差等為彼

之差等如相慕效故大句比大股若小句比小股

大句小句于

大股幾倍小句亦小于小股幾倍又大句互視之用以
大于小句幾倍大股亦大于小股幾倍

原有一件與今一件相比之例為今又一件與原又一

件相比之例是此視彼之所來以往彼亦視此之所往

以來如互相酬報故弦之較比句之較反若句之和比

弦之和

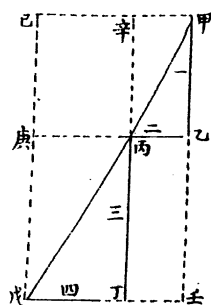
弦之和大于句故句之較反大于弦若和之數
弦大于句幾倍則較之數句大于弦亦幾倍

是以別之為互視也

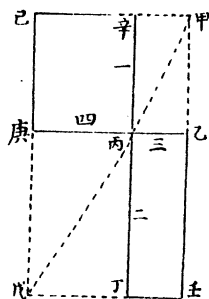
如圖以甲乙為一率丙乙為二率丙丁為三率丁戊為

四率作甲戊弦成兩句股次引甲乙及丁戊會于壬成

圖率三

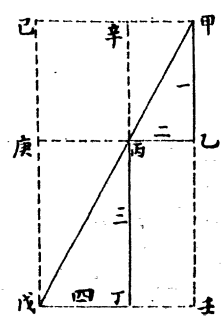


圖視互

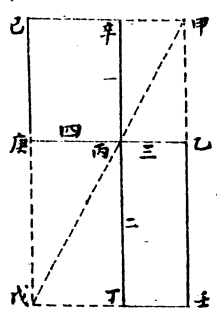


兩長方以角相連于丙次引
己辛及乙壬會于甲引己庚
及壬丁會于戊乃作甲戊線
則辛丙與丙丁若乙丙與丙
庚是先知同實而成其比例
也

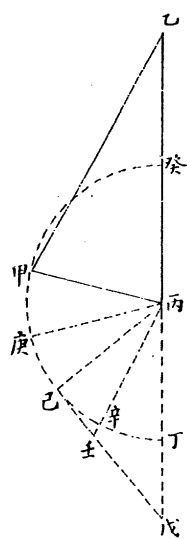
三率圖



互視圖



乙丁長方為二三相乘之積
 亦引乙丙至庚引丁丙至辛
 作甲辛及戊庚線並引長之
 會于已成辛庚長方為一四
 相乘之積是先有比例而成
 同實之長方
 如圖乙丙乘丙丁為乙丁長
 方辛丙乘丙庚為辛庚長方



丙辛線與乙甲平行則辛

丙丁角與乙角等辛丙甲

角與甲角等

其辛丙庚角為兩角之較而辛丙巳角其半較也已

丙丁及己丙甲皆半外角也以半較角與半外角相

減成乙角

于丁丙巳內減辛丙巳
其餘丁丙辛即乙角度

若相加亦成甲角

于巳丙甲加辛丙巳
成辛丙甲即甲角度

半較角用切線何也曰此比例法也角與所對之邊並

問三角形兩又術用外角切線何也曰此分角法也一角在兩邊之中則角無所對之邊邊無所對之角不可以正弦為比例今欲求未知之兩角故借外角分之也然則何以用半較角曰較角者本形中未知兩角之較也此兩角之度合之即為外角之度必求其較角然後可分而較角不可求故求其半知半較知全較矣此用半較角之理也

如圖甲丙乙形先有丙角則甲丙丁為外角外角內作

以正弦為比例今既無正弦可論而有其所對之邊故
即以邊為比例

角之正弦可以例邊則邊之大小亦可以例角

是故乙丁者兩

邊之總也乙癸者兩邊之較也而戊己者半外角之切
線也壬己者半較角之切線也以乙丁比乙癸若戊己
與壬己故以切線為比例也

然則何以不徑用正弦曰凡一角分為兩角則正弦因
度離立不同在一線不可以求其比例其在一線者惟
切線耳而邊之比例與切線相應切線比例又原與正

字垂線即此

線為切員線與甲丁平行引諸線至其上

引丙甲至午引丙丁至戌

引丙辰割庚點至未引丙卯割辛點至壬

則午戌切線上比例與甲丁通弦

等而正弦之比例在切線矣

先以甲丁與辰子當兩正弦之總與較今午戌與未

壬亦可當兩正弦之總與較則先以酉丁與酉子為半總半較者今亦以己戌與己壬為半總半較矣

故曰用切線實用正弦也

切線與正弦所以能同比例者以有通弦作之合也

問三較連乘之理曰亦句股術也以句股為比例而以

三率之理轉換之則用法最精之處也故三較連乘即

得容員半徑上方乘半總之積

於子則子甲與子丁若甲丑與卯丁

甲丑子與丁卯子兩句股形有子交

角等丑卯皆正角即兩形相似而比例等然則子甲者大形之弦子丁者小形之弦而甲丑者大形之股卯丁

者小形之股也弦與弦若股與股而甲丁即兩正弦之

故子甲比子丁若丑甲與卯丁

總甲丁為子甲子丁之總辰子即兩正弦之較以子丁

其較辰子是辰子為子甲子丁之較亦即為甲丑卯丁之較平分甲丁半之於酉則

酉丁為半總酉子為半較其比例同也全與全若半與半故甲丁與辰

子為兩正弦之總與較則半之而為酉丁與酉子亦必若兩正弦之總與較

於是作午戌切員線引平分線丙酉至己分甲己丁弧于己自巳作午戌線與己丙為十

之積也

置三較連乘數以半總除之得數一千二百二十五平方開

之得容員半徑三十倍之得容員徑七十

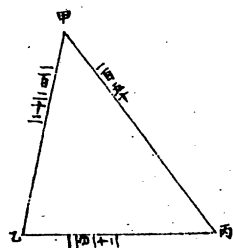
置三較連乘數以半總乘之得數四千五百一十五萬八千四百平

方開之得三角形積六千七百二十

若如常法求得中長線一百二十以乘乙丙底而半之所

得積數亦同

然則何以見其為勾股比例曰試從形心如法作線



假如甲乙丙三角形甲丙邊
 一百五十甲乙邊一百二十
 二乙丙邊一百一十二術以
 半總一百九十二較各邊得
 甲丙之較四十二甲乙之較
 七十乙丙之較八十三較連
 乘得數二十三萬五千二百
 即容員半徑自乘又乘半總

此線與丁已引甲丁分角線出形外遇於壬戌甲卯
員半徑平行

壬大句股形與甲已丁小句股之比例等從辰作辰
壬線成甲

辰壬大句股與甲戌丁術為以丁已比壬卯若甲已
小句股為比例亦同

與甲卯也次以丁已自東方為一率以丁已乘壬卯

之長方為次率則其比例仍若甲已三率與甲卯四

率也乘之者並丁已故所乘之
丁已與壬卯比例不變也

以數明之甲已八十甲卯一百九十二為二倍四分

比例丁已三十五壬卯八十四亦二倍四比例丁

分為六句股形

容形
員心
心即

又引甲丙邊至卯使卯丙如

乙戌引甲乙邊至辰使乙辰如巳丙則甲卯甲辰並

半總

六小句股形之句各于其兩
相同者而取其一即成半總

而丙卯為甲丙邊

之較

即乙戌
或乙辛

乙辰為甲乙邊

之較

即巳丙
或辛丙

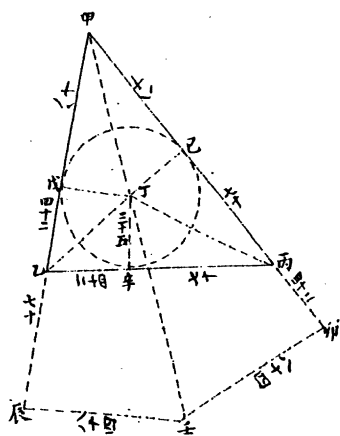
甲巳為乙丙邊

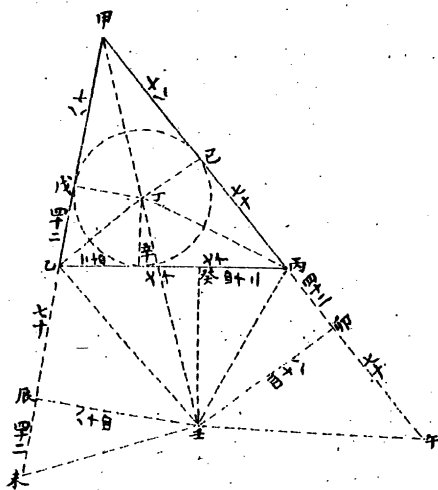
之較

巳丙同辛丙又丙
乙辛則卯巳同乙丙而

甲巳為其較若用辰戌以
當乙丙則甲戌為較亦同又

從卯作卯壬十字垂線至壬





底又同用丙壬乙壬
兩弦亦不得不等
於是自

癸作癸壬垂線
卯壬辰壬並垂線故癸壬

亦必成丙癸壬句股形與丙

卯壬形等即成癸丙卯壬四

邊形與丁巳丙辛小四邊形

為相似形
卯與癸俱方角而小形之已與辛亦方

角則大形之丙角與壬角合之亦兩方角也而小形之
丙角原為大形丙角之外角合之亦兩方角也則小形
之丙角與大形之壬角等而小形之丁角亦與大形
之丙角等是大小兩形之四角俱等而為相似形

已自乘一千二百二十五丁巳乘壬卯二千九百四十亦二倍四分比例故曰比例等

又移辛點至癸截丙癸如丙卯則乙癸亦如乙辰引

丙卯至午使卯午同乙辰乙亦同癸引乙辰至未使辰未

同丙卯丙亦同癸則午丙及未乙並同乙丙又作丙壬乙

壬午壬未壬四線成午丙壬及乙未壬及乙丙壬各

三角形皆相等

丙卯壬午股形與未辰壬等則丙壬必等未壬又午卯壬午股形與乙辰

壬等則午壬等乙壬而午丙壬及乙未壬兩三角形必等矣其乙丙壬三角形既以乙丙與丙兩三角形同

乘丙卯之積即丁巳乘卯壬之積可通用也先定以
丁巳自乘比丁巳乘卯壬若甲巳與甲卯今以三率
之理通之為以丁巳自乘比巳丙乘丙卯亦若甲巳
與甲卯

一 丁巳自乘方

即容員半徑自乘

二 巳丙乘丙卯長方

即甲乙之較乘甲丙之數

三 甲巳

即乙丙之較

四 甲卯

即半總

則丁巳丙句股形與丙卯壬形亦相似而比例等大四邊形各均剖其半以成句股則其相似之比例不變全與全若半與半也術為以丁巳比巳丙若丙卯與卯壬也

一 丁巳

二 巳丙

三 丙卯 即甲丙之較戊乙

四 卯壬

凡三率法中二三相乘一四相乘其積皆等則巳丙

五千二百丁巳自乘

一千二百二十五

又以甲卯

一百九十二

乘

之亦二十三萬五千二百故可通用

問三較之術可以求角乎曰可其所求角皆先得半角即銳鈍通為一術矣

術曰以三邊各減半總得較各以所求角對邊之較乘半總為法以餘兩較各與半徑全數相乘又自相乘為實法除實得數平方開之為半角切線檢表得度倍之為所求角

復以三率之理轉換用之則三較連乘之積以已丙較乘戊

乙較為二率又以甲已較為三率
乘之是二三相乘即三較連乘
即容員半徑自乘

方乘半總之積也
以丁已半徑自乘為首率以甲卯半總為四率乘之是一四相乘也

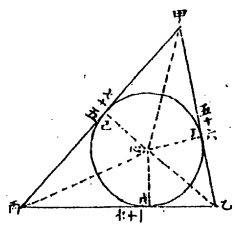
凡一四相乘必與
二三相乘之積等

以數明之丁已三十卯壬八十
相乘得二千九百四

十已丙七十丙卯四十
相乘亦二千九百四十故可通

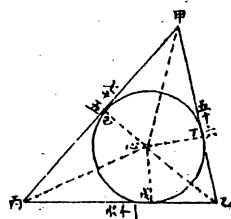
用

已丙乘丙卯二千九百四十
又以甲已八乘之得二十三萬



次求丙角術以丙角所對邊甲乙之較。乘半總得

二。為法以餘兩較 甲乙較 一六 四〇	丙較 三五 各乘半徑全數又自相	乘得數 一四〇〇〇〇〇〇 為	實法除實得數 六九四四四 四四四四	平方開之得數 八三三 為半	角切線檢表 三十九度四十 八分一十九秒	倍之得乙角 七十九度三十 六分三十八秒
---	--	---	--	--	--	--



假如甲乙丙三角形甲丙邊
七十五甲乙邊五十六乙丙
邊六十一與半總九十六各
相減得甲丙之較二十一甲
乙之較四十乙丙之較三十
五

今求乙角術以乙角所對邊
甲丙之較二乘半總九得數
六

三分五
十三秒
倍之得甲角
五十三度〇七分四十六秒

問前條用三較連乘今只用一較為除法何也曰前條求總積故三較連乘今有專求之角故以對邊之較為法也然則用對邊何也曰對邊之較在所求角之兩旁為所分小句股形之句今求半角切線故以此小句為法也

如求乙半角則所用者角旁小句股
心戊乙或心丁乙其句
戊乙

或乙
丁並二十一即對邊甲丙之較也術為以乙戊比心

數^{三八}為法餘兩較^{甲丙二一}各乘半徑全數又自

相乘得數^{七三五〇〇〇〇〇}為實法除實得數^{一九四}

〇六二平方開之得半角切線^{四三七}檢表^{二十三度三十}

七分五十秒半倍之得丙角^{四十七度一十五分四十五秒}

次求甲角術以甲角所對邊乙丙之較^三乘半總得

數^{三三六}為法餘兩較^{甲丙二一}各乘半徑全數又自

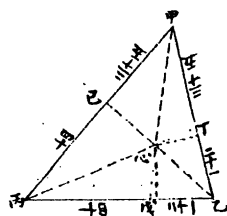
相乘得數^{八四〇〇〇〇〇}為實法除實得數^{二五〇}

〇〇〇平方開之得半角切線^{五〇〇}檢表^{二十六度三十}

除也然則又何以對邊之較除曰非但以較除也乃以較之冪除也何以言之曰原法三較連乘為實今只以兩較乘是省一乘也既省一對邊之較乘又以對邊之較除之是以較除兩次也即如以較自乘之冪除之矣餘兩較相乘先又各乘半徑何也曰此三率之精理也凡線與線相乘除所得者線也冪與冪相乘除所得者冪也先既定乙戌句為首率心戌股即容員半徑為次率半徑為三率乙角切線為四率而今無心戌之數惟三較

戊若半徑與乙角

小形之角即半角也之切線



次除也

古謂之異除同除

用兩次除亦有說乎曰前條三較連乘必以半總除之而得容員半徑之方冪今欲以方冪為用故亦以半總

其與半總相乘何也曰將以半	總除之又以小形句	之今以兩除法	相乘然後除之變兩次除為一
	即對邊之較	一半總一對邊之較即小形句	

故得數開方即成切線

又術

以三較連乘半總除之開方為中垂線

即容員半徑

以半徑

全數乘之為實各以所求角對邊之較除之即得半角

切線

一

乙戊

乙角對邊之較

丙戊

丙角對邊之較

甲己

甲角對邊之較

二

心戊中垂線

心戊中垂線

心己中垂線

亦即心戊

三

半徑全數

半徑全數

半徑全數

連乘中有心戊

即容員半徑

自乘之冪

即三較連乘半總除之數

故變

四率並為冪以乙戊句冪為首率

即對邊之較除兩次

心戊股冪

為次率

即半總除連乘數

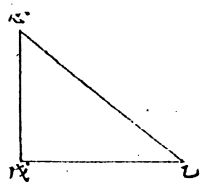
半徑之冪為三率

即半徑自乘

得半角切

線之冪為四率

即分形之乙角



一 乙戊

今用乙戊自乘

二 心戊

心戊自乘

三 半徑

半徑自乘

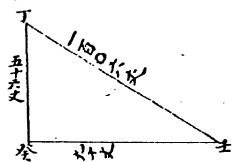
四 乙角切線

切線自乘

四 乙半角切線 丙半角切線 甲半角切線

此即用前圖可解乃本法也

論曰常法三邊求角倘遇鈍角必于得角之後又加審
馬以鈍角與外角同一八線也今所得者既為半角則
無此疑實為求角之捷法



開方得句故也

然則句股弦和較之法又安從生曰生於割圜

試以丁壬弦為半徑作戊丁丙巳圜 全徑二百一十

二 半徑一百。六 乙丁正弦九十 即癸壬股 乙壬餘

如法用丁壬壬癸相加得和一百一十

六相減得較一十六丈較乘和三千一百三十

六為實丁癸五十六丈為法除之亦仍

得五十六丈何則股弦較乘和亦

補遺

問以邊求角

二術 句股第

因和較乘除而知正角乃定其為

句股形何也曰古法句弦較乘句弦和開方得股今大

邊壬與小邊丁

癸

以和較相乘為實癸壬邊為法除之而

仍得癸壬是適合開方之積也則大邊小邊之和較即

句弦之和較而癸為正角成句股形矣

凡句股形弦為大邊而對正角

今丁壬邊最大即弦也

故所對之癸角為正角

試再以丁壬與壬癸之和較求之

弦和若以句弦和
除之亦得句弦較

更之則正矢乘大矢為實以正弦除之仍得正弦矣句

弦較丙乙乘句弦和乙庚為實以
乙丁股為法除之而仍復得股

論曰句股形在平圓內其半徑恒為弦若正弦餘弦則

為句為股可以互用故其理亦可互明

以丁壬及丁癸
二邊取和較求

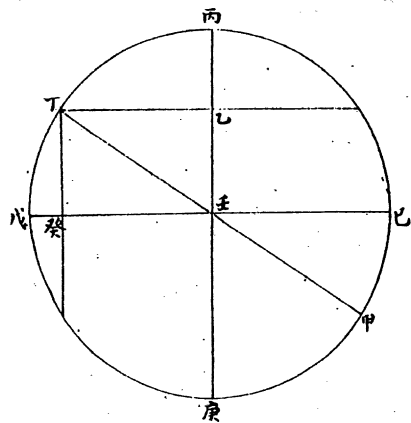
壬癸邊為句弦求股以丁壬及壬癸二邊
取和較求丁癸邊為股弦求句一而已矣

問數則合矣其理云何曰仍句股術也

如上圖於圓徑兩端

如丙
如庚

各作通弦線至正弦乙丁之銳



弦五十六 即癸丁句 丙乙正矢五

十 即乙丁句較 乙庚大矢一百六十

二 即丙和 正矢乘大矢得數八

千一百開方得正弦 即句弦和乘較開方

股得

然則此八千一百者既為正矢大矢相乘之積又為正

弦自乘之積故以正弦自乘為實而正矢除之可以得

大矢大矢除之亦得正矢 即乙丁股自乘為實而以句弦較丙乙除之得乙庚為句

丁正弦為其股其一丁庚大矢為
大形之股而乙丁正弦為其句

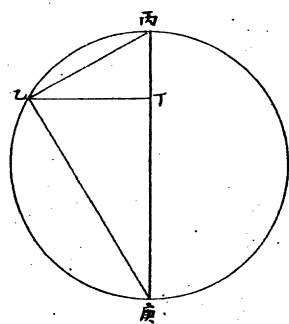
一 丁丙正矢 小形句 凡二率三率相乘與一

二 乙丁正弦 小形股 四相乘等積故乙丁自

三 乙丁正弦 大形句 乘即與丁丙丁庚相乘

四 丁庚大矢 大形股 等積也

論曰凡割圜算法專恃句股古法西法所同也故論句
股者必以割圜而論割圜者仍以句股如根株華實之
相須乃本法非旁證也



如庚乙成丙乙庚大句股形又

因中有正弦成大小兩句股形

乙丁庚為大形而相似以乙丁

乙丙丁為小形乙角為大形乙

角之餘而與庚角等即大形乙

既為小形之股又為大形之句其比例為丙丁句小形與

乙丁小形股若乙丁大形句與丁庚大形股也故正矢丙乘大

矢庚與正弦乙自乘等積丙庚全徑為正弦所分其一

半較角
切線

論曰試作壬丙線與乙甲平行分外角為兩則壬丙丁

即乙角其正弦卯丁又甲丙壬即甲角其正弦甲丑以

兩句股丑子甲相似之故能令兩正弦卯丁甲之比例移

於通弦以成和較丑甲與卯丁既若子甲與子丁則丁

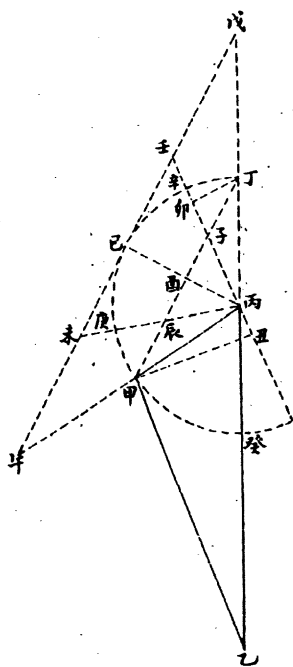
較而半外角半較角之算以生半外角為和半較角為

同比例即與兩邊並如銳角

又論曰此所分大角為鈍角故甲丑正弦作於形外然

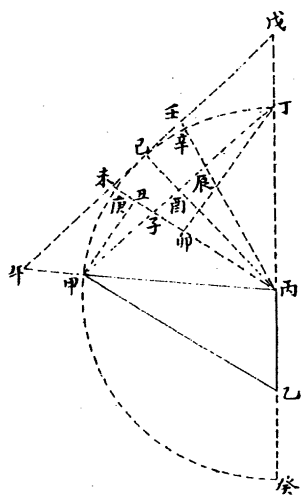
或疑切線分外角以正弦為比例恐不可施於鈍角作此明之

鈍角形用
外角一



甲丙乙鈍角形先有丙角及丙甲丙乙二邊求餘角
一率丁乙 邊 二率癸乙 邊 三率己戊 半外角切線 四率壬己

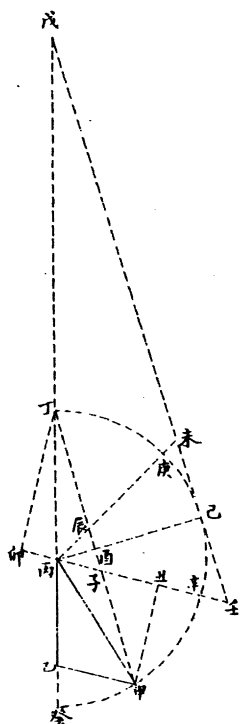
三 用 鈍 角 形
外 角



丙甲乙形先有丙角求餘角 法為邊總丁乙與邊較
乙癸若半外角切線已戊與半較角切線已壬 此因
先得鈍角故所分之內反無鈍角而正弦所
作之小句股並在外角之內同銳角法矣

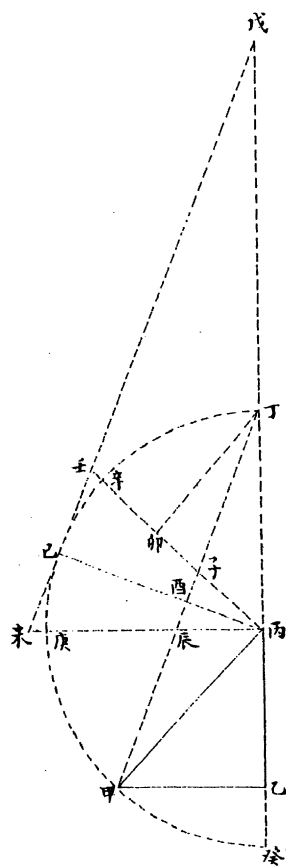
雖在形外而引分角線至丑適與之會即能成丑子甲句股形與卯子丁相似而生比例

鈍角形
用外角



丙乙甲形先有丙角求餘角法為邊總丁乙與邊較乙癸若半外角切線戊己與半較角切線未己此亦因所分為鈍角故卯丁正弦在形外又大邊為半徑故乙癸較亦在形外而丁乙為和餘並同前

二用句
外股形

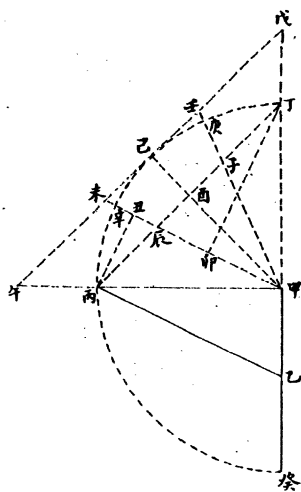


甲乙丙形先得丙角求餘角如法作丙庚線與乙甲句平行次截辛丁如庚甲作辛丙線分外角為兩則小角之正弦卯丁大角之正弦即丙甲而成兩句股相似為切線比例法為句弦和丁乙與句弦較乙癸若半外角切線已戊與半較角切線已壬此以丙甲為半徑作外角弧而即用丙甲為正弦知辛丙甲為正角而

丁辛同庚甲即辛丙甲同丁丙庚又即同丙乙
甲而乙為正角矣以乙正角減外角餘為甲角

論曰右並以先不知其為句股形故求之而得正角凡
正角之弧九十度別無正弦而即以半徑全數為正弦
得此明之

句股形
用外角
三

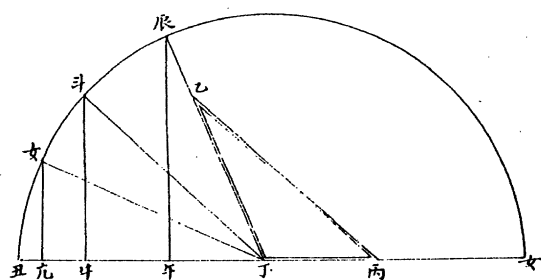


問平三角形以一邊為半徑得三正弦比例不識大邊

亦可以為半徑乎

小邊次邊為半徑已具前條故云

曰可



如乙丙丁鈍角形引乙丁至辰如

乙丙大邊而用為半徑以丁為心

作丑辰亥半弧從辰作辰午為丁

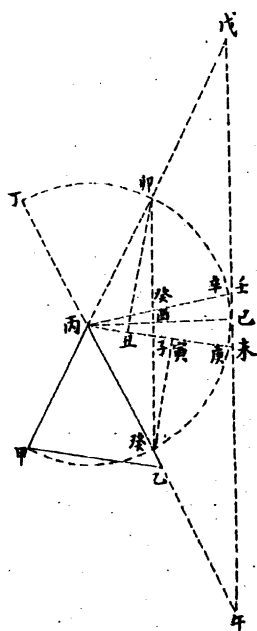
鈍角正弦又作丁斗半徑與乙丙

平行則斗牛為丙角正弦又截女

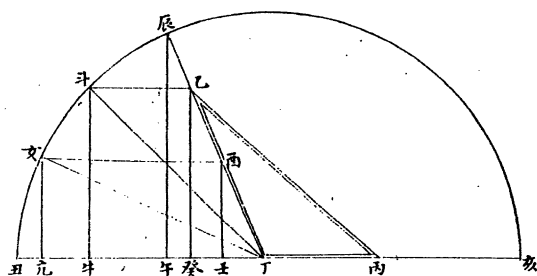
丑弧如辰斗作女丁半徑則女亢

以大邊為半徑作外角弧分角線丙未與次大邊平行
 邊總乙丁與邊較乙癸若半外角切線戊己與半較
 角切線
 壬己

銳角形



以次大邊為半徑作外角弧分角線丙未與小邊乙甲
 平行大邊總丁癸與邊較乙癸若半外角切線己戊與
 半較角切
 線己壬



一大邊
辰乙丙即
丁

正弦也又截酉丁如丁丙小邊為
弦其股酉壬與女亢平行而等則
乙角正弦也又辰丁大邊為弦乙即
丙其股辰午原為丁大角正弦也
於是三邊並為弦三對角之正弦
並為股成同角相似之句股形而
比例皆等可以相求矣

一丁角正弦
辰

為乙角正弦合而觀之丁角正弦辰最大故對邊乙丙

亦大丙角正弦斗居次故對邊乙丁亦居次乙角正弦

女最小故對邊丁丙亦小

又問若此則三邊任用其一皆可為半徑而取正弦是

已然此乃同徑異角之比例也若以三邊為弦三正弦

為股則同角異邊之比例也兩比例之根不同何以相

通曰相通之理自具圖中乃正理非旁證也試於前圖

用乙丁次邊為弦其股乙癸與斗牛平行而等則丙角

又試於乙丙丁形

或銳角同理
或鈍角或

以丁丙小邊為半徑作房

箕壁象弧

為以
心乙

如上法取三正弦

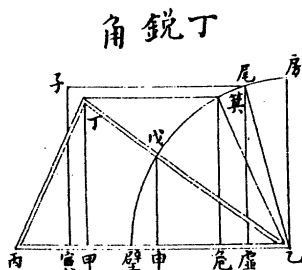
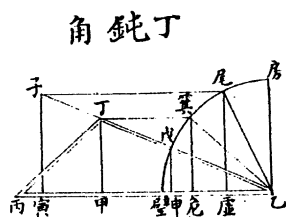
以尾壁弧為丁角度
其正弦尾虛又箕壁

弧為丙角度其正弦箕危又戌
壁弧為乙角度其正弦戌申

成同徑異角之比例又

如法用三邊為弦三正弦為股

乙戌即丁丙小邊配乙
角正弦戌申原如弦與



股又本形乙丁次邊為弦則
丁甲為股與箕危平行而等
丙角正弦也又引乙丁至子
成子乙即乙丙大邊以為弦
則子寅為股與尾虛平
行而等丁角正弦也 則並
為相似之句股形而比例等

二丁角正弦

辰午

二大邊乙丙

三次邊乙丁

小邊丁丙即酉丁

三丙角正弦

乙酉癸乙角正弦

四丙角正弦

乙癸乙角正弦酉壬

四次邊乙丁

小邊丁丙

此如先得大邊

乙丙即辰丁

與所對大角

丁故用辰午丁大

句股形為法求餘二句股也

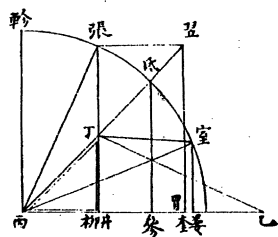
乙癸丁酉壬

皆同用丁角而形

相似故法可相求其實三正弦皆大邊為半徑所得故

其理相通未有理不相通而法可相求者故曰皆正理

非旁證也



異角之比例又仍用三邊為弦三正

弦為股

引丁丙至翌與大邊乙丙等

成翌丙弦其股翌胃與張井

平行而等

丁角正弦也又乙丁次邊

成氏丙弦

其股氏參原為丙角正弦

又丁丙小邊

為弦其股丁柳與

即復

室奎平行而等乙角正弦也

成相似之句股形而比例等

一次邊乙丁

即氏

二正角

氏參

三大邊乙丙

即翌

小邊丁丙

一小邊丁丙 即戌乙

二 乙角 戌申 正弦

三大邊乙丙 即乙子 次邊丁乙

四 丁角 子寅 即尾虛 丙角 丁甲 即箕危 正弦

此如先得小邊 丁丙 與所對小角 乙 故以戌申乙小句股形為法求兩大句股也 丁甲乙子寅乙 皆同用乙角而形相似

又試以乙丁次邊為半徑作象限如前 以丙為心 取三正弦

張婁為丁角弧度張井其正弦氏婁為丙角弧度氏參其正弦室婁為乙角弧度室奎其正弦成同徑

四 丁角 張井 即 翌

乙角 丁柳 即 室

此如先得次邊 乙 及所對丙角故以氏參丙句股為法

求大小二句股也 求 翌 胃 丙 為 以 小 求 大 求 丁 柳 丙 為 以 大 求 小 皆 同 用 丙 角

而比例等

問員內三角形以對弧為角倍度設有鈍角小邊何以

取之 或問內原設銳角兩 曰法當引小邊截大邊作角

之通弦 如圖乙甲丙鈍角形在平員內以各角切員而乙甲邊小于半徑則引乙甲出員周之外乃以

甲角為心平員心丁為界作子丁丑弧截引長邊于子截大邊于丑則丑甲子甲並半徑與丁甲等而丑子為

歷算全書卷五十三